Memoria TFM

Master en Estadística e Investigación Operativa

Resolución del modelo multimercado de oferta óptima mediante el método ACCPM

Unai Aldasoro Marcellan

Barcelona, junio de 2010

1.- JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO

1.1.- Justificación Personal

Interés:

Uno de los objetivos personales a la hora de abordar este Trabajo de Fin de Master ha sido el trabajar en un contexto relacionado con la tecnología y la industria, es decir, enlazar mi formación previa de Ingeniería Industrial con las técnicas de optimización abordadas durante el Master en Estadística e Investigación Operativa.

El segundo objetivo es la familiarización con los diferentes pasos de la resolución de un problema. Es decir, partiendo del modelo barajar diferentes técnicas de resolución, elegir del método, valorar la herramienta informática y lenguaje más adecuados para su implementación, realizar el proceso de implementación y valorar los resultados.

Formación previa:

Durante el Master en Estadística e Investigación Operativa he seguido un proceso de familiarización con el proyecto en cuestión cursando la asignatura de especialización "Mercats Elèctrics Liberalitzats" donde se presentaban las características principales de los mercados eléctricos en España, se abordaban ejemplos de modelización a corto, medio y largo plazo de la planificación de la generación eléctrica y finalmente se procedía a la resolución mediante el lenguaje AMPL de problemas de pequeña escala. Tras ello realicé el trabajo fin de asignatura del curso "Mètodes heurístics en programació matemàtica" abordando mediante diferentes métodos heurísticos el problema de planificación de la generación energética suponiendo un escenario determinista y de mercado único a corto plazo.

Considero que esta formación junto con los estudios de Ingeniería Industrial me han permitido tener una visión cercana del contexto tecnológico y de la dificultad real de la resolución del problema en cuestión.

1.2.- Contexto : GNOM (Group on Numerical Optimization and Modeling).

GNOM es un grupo de investigación de la UPC formado por PDI y alumnos de post-grado y doctorado de los departamentos de Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada 1 de la UPC. Es grupo de investigación consolidado reconocido y financiado por la Generalitat (SGR-2009-1122). El grupo trabaja tanto en métodos de optimización numérica como en modelos de programación matemática, con especial interés en las aplicaciones a problemas de energía y protección de datos estadísticos. Puede encontrarse más información sobre GNOM en http://gnom.upc.edu

El trabajo a desarrollar en este Trabajo de Fin de Master formará parte del Proyecto de Investigación Fundamental no Orientada "*Short- and Medium-Term Multimarket Optimal Electricity Generation Planning with Risk and Environmental Constraints*", financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto DPI2008-02153). En concreto, desarrollaría parte de la tarea descrita en la memoria técnica como:

ALG_LAG : To study the suitability of the dual decomposition methods (Lagrangian Relaxation, Cutting Plane, **ACCPM**) to solve the Stochastic Integrated Multimarket Optimal Bid model.

Dicho proyecto cuenta con la participación como Ente Promotor Observador de la compañía Gas Natural – Unión Fenosa. Puede encontrarse más información sobre el proyecto en la url http://gnom.upc.edu/projects/energy/dpi2008-02153/

2.- OBJETIVOS

El presente proyecto pretende abordar los siguientes objetivos:

- Resolver el problema estocástico mixto descrito en el artículo “Optimal Day-Ahead Bidding in the MIBEL’s Multimarket Energy Production System” [05] mediante una técnica alternativa a las utilizadas hasta el momento (Perspetive Cuts [06], [07], [08]).
- Adaptación del método Analytic Center Cutting Plane Method (ACCPM, [01], [02], [03] y [04]) para resolver problemas enteros, introduciendo este método en una estrategia de exploración Branch & Bound.
- Definir y testar diferentes formulaciones generadoras de cortes en el problema.
- Valorar los resultados obtenidos con el método ACCPM y compararlos con los métodos alternativos Perspective Cuts y CPLEX [09].
- Publicar los principales resultados y conclusiones en una revista especializada, como podría ser, en función de los resultados, SORT (IDESCAT, http://www.idescat.cat/sort/) o “*European Journal of Operational research”* (Elsevier, http://ees.elsevier.com/ejor/).

3.- DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

3.1.- Contexto

El proceso de integración de los sistemas eléctricos de España y Portugal culmina con la creación de una serie de mercados eléctricos comunes denominado Mercado Ibérico de la Electricidad (MIBEL, más información en http://www.mercadoibericoenergia.org/presentacion.html). Esta serie de mercados secuenciados incluye el Day-Ahead Market (DAM), el Reserve Market (RM) y un conjunto de seis Intraday Markets (IM).

En este contexto la compañías generadoras que participan en el mercado eléctrico pueden aumentar sus beneficios optimizando su participación en esta secuencia de mercados. Analizando concretamente la perspectiva a corto plazo el objetivo de la compañía generadora será maximizar los beneficios esperados de su participación en el DAM, el RM y los IM. Además la compañía tendrá que tener en cuenta sus Contratos Bilaterales (CB) así como los Contratos de Futuros (CF) ya acordados.

El artículo “Optimal Day-Ahead Bidding in the MIBEL’s Multimarket Energy Production System” [05] construye un modelo que proporciona a la compañía generadora la estrategia óptima de participación en el DAM teniendo en cuenta la secuencia mercados y sus CB y CF. Esta formulación será tomada como referencia, para el desarrollo del modelo del mercado del proyecto aquí descrito.

3.2.- Estructura del mercado

DAM (Day Ahead Market): Se trata del mercado principal donde se negocia la mayor parte de las transacciones. Consiste en 24 subastas simultáneas, una por cada intervalo horario del día siguiente. Por lo tanto se trata de un mercado a un día vista.

La casación de la oferta y la demanda lo realiza el operador del mercado teniendo en cuenta los CB y CF.

RM (Reserve Market): Se produce inmediatamente después del proceso de casación del DAM. Es un mercado de servicios complementarios donde las compañías envían pujas para aumentar o disminuir la energía casada de las unidades durante el DAM. Si una puja se casa en el RM entonces la unidad debe permitir cambiar el nivel de generación en un intervalo dado en la operación a tiempo real.

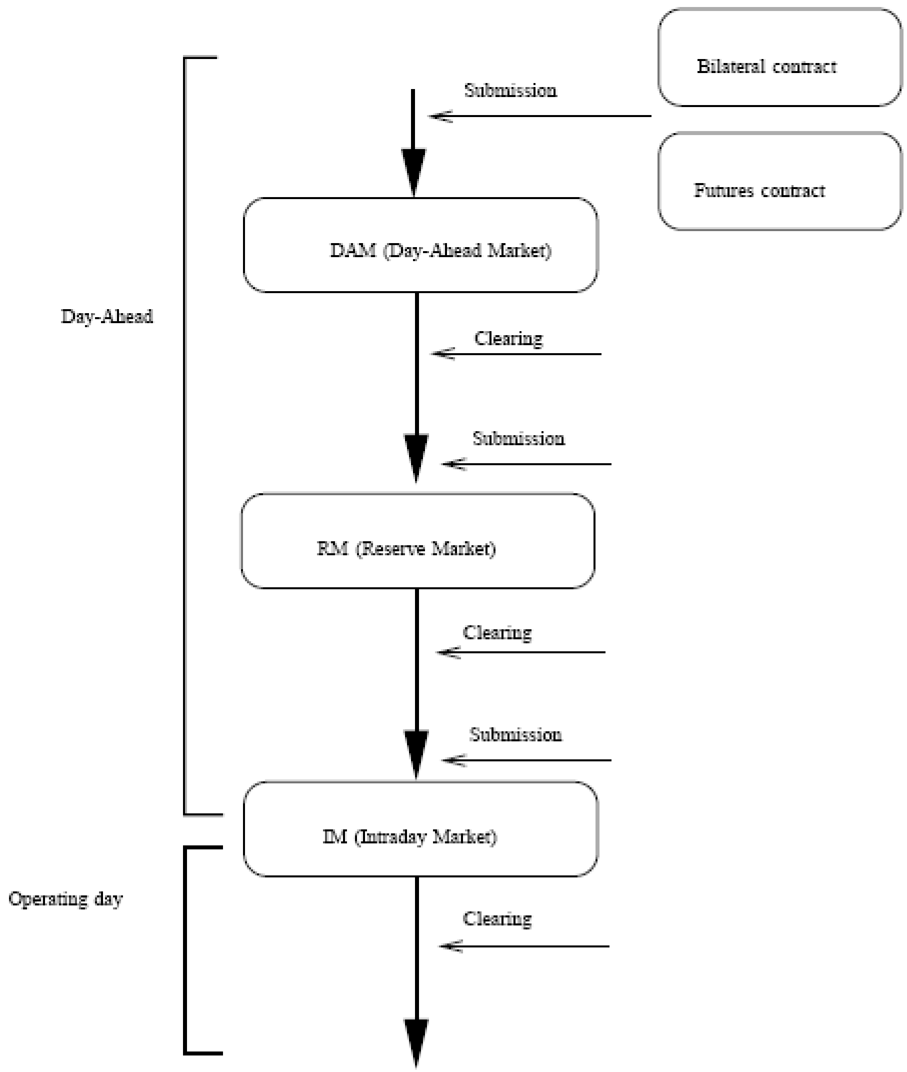

Figura 1: Esquema de la secuencia del mercado

IM (Intraday Market): Tiene lugar antes y durante el día de consumo. Se compone de 6 mercados consecutivos con 24 subastas cada uno. En este mercado las compañías generadoras pueden tanto vender como comprar electricidad. El funcionamiento es exactamente igual al DAM y tiene como objetivo que las compañías generadoras puedan cambiar la planificación resultante. Cabe destacar que en cada intervalo horario una unidad solo puede enviar ofertas de compra o de venta, no ambas, no obstante este rol puede cambiar de un intervalo horario a otro. Una unidad puede participar en este mercado si sus pujas han sido casadas en el DAM o si está produciendo energía para saldar los CB.

3.3.- Hipótesis

El modelo multimaercado de oferta óptima asume una serie de hipótesis:

- Las unidades que participan en el RM pujarán siempre la capacidad AGC (Automatic Generation Control, característica fija de cada unidad). Únicamente se optimizará la participación o no de cada unidad.
- Se considera únicamente la primera sesión del IM.
- Se supone que todas las pujas realizadas en los RM e IM serán casadas.

4.- MODELO DE OPTIMIZACIÓN

Tal y como se verá a continuación el problema abordado es un problema de optimización estocástica multietapa mixto entero:

4.1.- Caracterizacíon de la incertidumbre

Los tres precios de mercado pueden ser caracterizados como variables aleatorias y pueden usarse para construir el árbol de escenarios. La probabilidad de cada escenario es igual al producto de probabilidades de cada vector de precios.

Cabe destacar que sólo hay un escenario de tercera etapa (RM) para cada escenario de segunda etapa (DAM) debido a las hipótesis realizadas sobre el mercado RM. En el RM la variable de decisión es pujar o no pujar, la cantidad pujada es un dato operacional independiente del precio RM. Por lo tanto no hay necesidad de representar el precio RM en escenarios ya que lo representamos mediante su valor esperado.

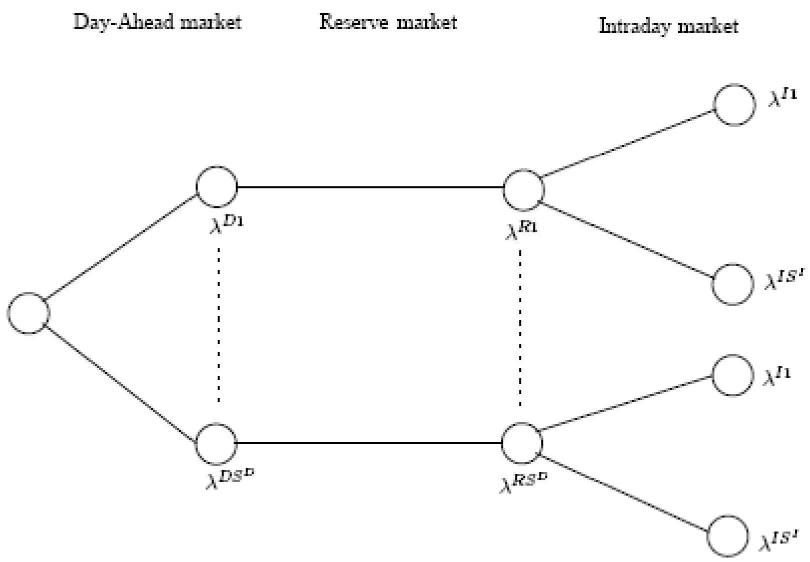

Figura 2: Árbol de escenarios

<u>Primera etapa (elaboración de la oferta al DAM)</u>

Las decisiones de primera etapa corresponden a la planificación de los encendidos y apagados de la unidades y la manera en que se generará la energía para cubrir los CB y los CF. De estos valores (variables de primera etapa) se deriva la oferta óptima a las 24 sesiones del DAM.

Segunda etapa (casación del DAM)

El operador de mercado casa el precio de las 24 sesiones del DAM y se obtiene la energía casada de la oferta que cada unidad de generación ha sometido al DAM.

Tercera etapa (casación del RM)

Se decide que unidades participan en el mercado de reserva y en que intervalos. El operador de mercado casa el precio RM de cada intervalo (24 en total)

Cuarta etapa (casación del IM)

Se decide que unidades participan en el IM y su rol como compradores o vendedores en los diferentes intervalos. El operador de mercado casa los precios de venta y de compra de cada intervalo (48 en total)

4.2.- Modelo

Variables de primera etapa

$f_{itj} \geq 0$: Contribución de la unidad *i* en el intervalo *t* al contrato FC *j*. Esta energía tiene que ser ofrecida a precio nulo *(instrumental price).*

$b_{it} \geq 0$: Contribución de la unidad *i* en el intervalo *t* para el cumplimiento de los contratos bilaterales.

$q_{it} \geq 0$: Cantidad energética ofertada a precio nulo *(instrumental price).*

$c_{it}^{u} \geq 0$: Coste de encendido de la unidad *i* en el intervalo *t*.

$c_{it}^{d} \geq 0$: Coste de apagado de la unidad *i* en el intervalo *t*.

$u_{it} \in \{0,1\}$: Estado de la unidad de generación, 1 si está en funcionamiento, 0 si está en parada.

Variables de segunda etapa y posteriores

$p_{it}^{M,s} \geq 0$: Cantidad energética de la unidad *i* casada en el mercado DAM en el intervalo *t* bajo el escenario *s*.

$y_{it}^{s} \geq 0$: Cantidad energética vendida por la unidad *i* en el intervalo *t* bajo el escenario *s*.

$w_{it}^{s} \geq 0$: Cantidad energética comprada por la unidad *i* en el intervalo *t* bajo el escenario *s*.

$p_{it}^{s} \geq 0$: Generación total de la unidad *i* en el intervalo *t* bajo el escenario *s*.

$r_{it}^{s} \in \{0,1\}$: Valdrá 1 si la unidad *i* participa en el RM en el intervalo *t* bajo el escenario *s*. Valdrá 0 en otro caso.

$v_{it}^{s} \in \{0,1\}$: Valdrá 1 si la unidad *i* vende energía en el intervalo *t* bajo el escenario *s*. Valdrá 0 en otro caso.

Función objetivo

La función objetivo corresponde a una función cuadrática que representa la maximización de los beneficios obtenidos de la participación en la secuencia de mercados:

$$\max_{p,q,f,b} \sum_{t\in T} \sum_{i\in I} -c_{it}^{u} - c_{it}^{d} - c_{i}^{b} u_{it} + \sum_{s\in S} P^{s} [\lambda_t^{D,s} p_{it}^{M,s} + \lambda_t^{R,s} r_{it}^{s} g_i + \lambda_t^{I,s} \left(y_{it}^{s} - w_{it}^{s}\right) - \left(c_i^{l} p_{it}^{s} + c_i^{q} \left(p_{it}^{s}\right)^2\right)]$$

Donde:
$\lambda_t^{D,s}, \lambda_t^{R,s}, \lambda_t^{I,s}$: Variables estocásticas. Precio de mercado de DAM, RM e IM en el intervalo *t* bajo el escenario *s*.
c_i^b, c_i^l, c_i^q : Coeficientes de coste constante, lineal y cuadrático de la unidad *i*.
g_i : Capacidad de generación ACG de la unidad *i*.
P^s : Probabilidad del escenario *s*.
T, I, S : Conjuntos de intervalos, unidades y escenarios respectivamente.

Restricciones

La participación en los diferentes mercados está sometida a un total de 29 familias de restricciones. Entre ellas encontramos restricciones referidas a:

- Obligado cumplimiento de los CB y CF.
- Restricciones de oferta máxima y mínima por unidad en el DAM.
- Decisión de participar o no participar en el RM por unidad.
- Elección de compra o venta de energía en el IM por unidad.
- Restricciones de generación total.
- Restricciones de apagados y encendidos de las unidades.
- Restricciones de no anticipatividad de escenarios (propios de modelos estocásticos multietapa).

Los casos reales de oferta al mercado que se deben resolver en el proyecto de investigación dan lugar a problemas de optimización cuadrática mixta (variables continuas y binarias) de grandes dimensiones (32.336 restricciones, 9.540 variables binarias, 13.580 variables continuas) que requiere el desarrollo de técnicas de optimización avanzadas para su resolución eficiente.

5.- MÉTODO DE RESOLUCIÓN

5.1.- Interés

Tal y como se ha mencionado anteriormente el problema analizado ha sido resuelto mediante el software comercial CPLEX sobre AMPL [10] y, en un trabajo que se está realizando en paralelo dentro del mismo proyecto de investigación en la Universidad del País Vasco, por el método de *Perspective Cuts*. Por tanto el interés de este trabajo es ver si el ACCPM resuelve satisfactoriamente el problema y si mejora el rendimiento ofrecido por los dos métodos alternativos mencionados.

Desde un punto de vista teórico la aplicación del ACCPM a nuestro problema abarca una gran cantidad de aspectos de la teoría de optimización. Así el ACCPM tiene una estructura de resolución típica de los métodos de descomposición de la función original (como por ejemplo el método de Benders, muy útil para problemas estocásticos) y realiza una exploración de la región factible semejante a los métodos de punto interior (ya que el centro analítico no coincidirá en general con un vértice). Además el problema abordado enriquece aun más el contexto de optimización ya que se tendrá que adaptar el método a un árbol de exploración de programación entera.

5.2.- Aplicaciones existentes de ACCPM

Consultando la literatura sobre resoluciones de problemas mediante ACCPM se observa que es un método muy eficiente para la resolución de problemas de gran escala. Los trabajos [11] y [12] estudian la resolución de problemas de flujos multiartículo no lineales de hasta 5000 arcos y 10000 artículos. En este contexto [13] concluye que comparativamente con otros métodos el ACCPM no es siempre el más rápido pero presenta un buen comportamiento de manera constante y es de lejos el más estable.

La descomposición del problema original que realiza el ACCPM crea una estructura muy adecuada para resolver problemas estocásticos. El trabajo [14] aborda la manera de resolver este tipo de problemas de manera general, mientras que [15] presenta una aplicación particular del ámbito de la planificación de portafolio donde se consigue resolver un problema de un millón de escenarios.

A día de hoy no existe una amplia literatura referida a la aplicación de ACCPM a programación entera. No obstante encontramos el trabajo [16] donde se aborda la resolución de un problema entero reformulado mediante relajación Lagrangiana. Los autores concluyen que el ACCPM es una potente alternativa al método de planos de corte de Kelly y a la optimización subgradiente cuando se tiene que resolver iterativamente un problema no diferenciable (por ejemplo en una exploración Branch & Bound).

Se espera que este método permita resolver de manera relativamente rápida y robusta el problema objetivo incluso con una gran cantidad de escenarios.

5.3.- Analytic Center Cutting Plane Method

El ACCPM es un método de resolución de problemas convexos mediante cortes sucesivos. Es posible aplicar el ACCPM a cualquier problema que tenga la siguiente forma:

$$mín\left\{ f(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{p} f_i(x) \mid x \in X = X_0 \cap_{t=1}^{r} X_t \right\}$$

<u>Hipótesis 1:</u> Los conjuntos $X_t \subset R^n$, $t = 0,...,r$ *son convexos. Las funciones* $f_j : R^n \to R$, $j = 1,..., p$ *son convexas.*

<u>Hipótesis 2:</u> La función f_0 *es lineal y el conjunto* X_0 *es un poliedro acotado definido por las inecuaciones lineales* $\langle B, x \rangle \leq b$

<u>Hipótesis 3:</u> El oráculo describe las funciones $f_j(x)$, $j = 1,..., p$ *y los conjuntos* X_t, $t = 1,..., r$.

La idea principal es resolver iterativamente un problema de programación lineal cuya solución es asociada a un corte de la región factible actual. De esta manera la caracterización de la región factible será cada vez más completa hasta que la solución del problema de programación lineal corresponda a la solución del problema original.

En este contexto se identifican tres elementos importantes en la resolución mediante el método ACCPM: el cálculo del centro analítico, la generación de los cortes y la caracterización de la región factible.

<u>Cálculo del centro analítico</u>

El centro analítico de un poliedro formado por el conjunto de puntos que cumplen $\{x \mid A^T x \le c\}$ corresponde a la única solución (si existe) del siguiente problema de optimización:

$$mín\left\{-\sum_{i=1}^{K} \log s_i \mid s = c - A^T x > 0\right\}$$

Si realizamos la siguiente hipótesis:

<u>Hipótesis 4</u>: El poliedro $\{x \mid A^T x \le c\}$ está acotado y es un conjunto no vacío.

El centro analítico es también la única solución del sistema de ecuaciones no lineales correspondientes a las condiciones de optimalidad de primer orden:

$$\begin{gathered} A^T x + s = c \\ A\lambda = 0 \\ Ys = e \end{gathered}$$

Donde Y es la matriz diagonal cuya diagonal principal es el vector dual y . Así, podemos calcular el centro analítico del polítopo dual $\{A\lambda = 0, \lambda \ge 0\}$ como la solución única de:

$$mín\left\{\langle c, \lambda\rangle - \sum_{i=1}^{K} \log \lambda_i \mid A\lambda = 0, \lambda > 0\right\}$$

<u>Oráculo</u>

Se llama oráculo al problema de optimización definido por el usuario con el objetivo de crear un corte en la región factible. La formulación del problema queda en manos del criterio del usuario, teniendo siempre en cuenta una serie de consideraciones:

El dato de entrada del oráculo será el centro analítico de la región factible actual. Mientras que los datos de salida corresponderá a la información local del problema en el punto de análisis: valor de la función objetivo $f(\tilde{x})$, el subgradiente $\partial f(\tilde{x})$ y la Hessiana $f''(\tilde{x})$.

Para cada punto $\tilde{x} \in X_0$ el oráculo dará como salida una de las siguiente información:

Corte de factibilidad:

Para $t \in \{1,...,r\}$ tal que $\tilde{x} \notin X_t$ el oráculo devuelve el vector $(\gamma_0, \gamma) \in RxR^n$ y el corte de factibilidad:

$\langle \gamma, x - \tilde{x}\rangle + \gamma_0 \le 0$ para todo $x \in X_t$

Corte de optimalidad:

Si el punto es factible $\tilde{x} \in X$, el oráculo devuelve p valores de la función objetivo $f_j(\tilde{x})$ y p subgradientes $\gamma_j \in \partial f_j(\tilde{x})$ que definen la siguiente inecuación:

$$f_j(x) \geq f_j(\tilde{x}) + \langle \gamma_j, x - \tilde{x} \rangle \text{ para todo } x \in X_t, \; j = 1, \ldots, p$$

<u>Región factible</u>

Sea $(x^1, \ldots, x^K)$ una secuencia de centros analíticos, donde K está dividida en dos conjuntos $I_K \cup J_K$ donde:

$$I_K = \{k \mid x^k \text{ es infactible (corte de factibilidad)}\}$$
$$J_K = \{k \mid x^k \text{ es factible (corte de optimalidad)}\}$$

Si $J_K \neq \emptyset$ se puede definir una cota superior del problema: $\bar{\theta}_K = \min\{f(x^k) \mid k \in J_K\}$

Teniendo en cuenta las inecuaciones válidas generadas hasta el momento podemos caracterizar la región factible L_k como el conjunto de puntos que cumplan:

$$\boxed{\begin{array}{l} z_i \geq f_j(x^k) + \langle \gamma_j^k, x - x^k \rangle \text{ para todo } j = 1, \ldots, p \text{ y } k \in J_K \\ 0 \geq \gamma_0^k + \langle \gamma^k, x - x^k \rangle \text{ para todo } k \in J_K \\ \bar{\theta}_K \geq z_1 + \ldots + z_p \\ b \geq \langle B, x \rangle \end{array}}$$

Finalmente podemos resumir el método de resolución de manera esquemática de la siguiente manera:

Mientras $\bar{z} - \underline{z} > \varepsilon$

1.- Calcular $\tilde{x}$, centro analítico de L_k

2.- Calcular $\underline{z}$, cota inferior del valor óptimo

3.- Ejecutar el oráculo en el punto $\tilde{x}$. Se obtiene:

a) Un corte de factibilidad

b) o bien un corte de optimalidad y $\bar{z}$ cota superior del valor óptimo.

4.- Añadir los cortes a la definición de la región factible L_k

Fin mientras

6.- PLAN DE TRABAJO:

El valor académico del Trabajo de Fin de Master corresponde a 30 créditos ECTS, lo cual equivaldría a 750 horas de dedicación según los estándares habituales. Dicho tiempo se empleará en realizar las siguientes tareas:

1. Estudio del modelo multimercado de oferta óptima. **(40 horas)**
2. Estudio y aprendizaje de uso de las librerías CPLEX. **(80 horas)**
3. Implementación y resolución del modelo multimercado con CPLEX: comparativa con AMPL. **(60 horas)**

4. Estudio del método ACCPM. **(40 horas)**
5. Desarrollo de la adaptación del método ACCPM al modelo multimercado: Definición de la estrategia de exploración Branch & Bound y del problema de optimización del oráculo. **(150 horas)**
6. Implementación del método ACCPM en C++ para la resolución del modelo multimercado. **(200 horas)**
7. Comparativa de resultados: CPLEX, Perspective Cuts, ACCPM. **(80 horas)**
8. Elaboración de la memoria. **(100 horas)**

7.- BIBLIOGRAFIA:

[01] Goffin, J.L; Vial, J.F, Convex Nondifferentiable Optimization: A Survey Focused on the Analytic Center Cutting Plane Method. University of Geneva HEC/Logilab Technical Report 99.02. 1999.

[02] Goffin, J.L; Vial, J.F, Multiple cuts in the analytic center cutting plane method. University of Geneva HEC/Logilab Technical Report 98.10. 1999.

[03] Goffin, J.L; Vial, J.F, Multiple Cuts with a Homogeneous Analytic Center Cutting Plane Method. Computational Optimization and Applications 24(1), p. 37-61. 2004.

[04] Goffin, J.L; Vial, A tutorial on ACCPM. University of Geneva HEC/Logilab. 2001

[05] Heredia, F.J; Corchero C., 2010. Optimal Day-Ahead Bidding in the MIBEL's Multimarket Energy Production System. Proceedings of the *7 International Conference on the European Energy Market*. June 23-25, 2010. Madrid. Spain (pendent de publicació als IEEE Xplore). http://www.eem10.com/

[06] Frangioni, A., Gentile, C., Perspective cuts for 0–1 mixed integer programs. Technical report 577, Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica "Antonio Ruberti" (IASI-CNR), 2002.

[07] Frangioni, A., Gentile, C., Perspective cuts for a class of convex 0–1 mixed integer programs. Mathematical Programming 106, p. 225-236. 2005.

[08] Frangioni, A., Gentile, C., SDP diagonalizations and perspective cuts for a class of Nonseparable MIQP. Operations Research Letters 35(2), p. 181 - 185, 2007

[09] CPLEX, 2008. CPLEX Optimization subroutine library guide and reference. Version 11.0 CPLEX Division, ILOG Inc., Incline Village, NV, USA.

[10] Fourer, R., Gay, D.M., Kernighan, B.W., 2003. AMPL: A modelling language for mathematical programming. CA: Brooks/Cole-Thomson Learning, 2nd edn.

[11] J.-L. Goffin, J. Gondzio, R. Sarkissian and J.-P. Vial, Solving Nonlinear Multicommodity Flows Problems by the Analytic Center Cutting Plane Method", Mathematical Programming, Series B, vol 76 1, 131-154. 1997

[12] J. Gondzio, R. Sarkissian and J.-P. Vial, Using an Interior Point Method for the Master Problem in a Decomposition Approach, Technical Report European Journal of Operational Research, volume 101,577-587. 1997

[13] A. Ouorou, P. Mahey and J.-Ph. Vial, A survey of algorithms for convex multicommodity flow problems, HEC Working Paper 97.13, Department of Management Studies, University of Geneva, Switzerland, June 1997.

[14] O. Bahn, O. du Merle, J.-L. Goffin and J.P. Vial , A Cutting Plane Method from Analytic Centers for Stochastic Programming", Mathematical Programming, Series B, 69, 45-73. 1995

[15] E. Fragnière, J. Gondzio and J.-P. Vial, A Planning Model with one Million Scenarios Solved on an Affordable Parallel Machine. Logilab Technical Report 98.11, Department of Management Studies, University of Geneva, Switzerland, June,1998.

[16] O. du Merle, J.-L. Goffinn, C. Trouiller and J.-P. Vial, A Lagrangian Relaxation of the Capacitated Multi-Item Lot Sizing Problem Solved with an Interior Point Cutting Plane Algorithm, Logilab Technical Report 97.5, Department of Management Studies, University of Geneva, Switzerland, April 1997.